Naam: ....

Werkcollegedocent (omcirkelen): Maint Berkenbosch / Remke Kloosterman / Jun Hoo

Geef voor al je antwoorden een korte verklaring.

$1\frac{1}{2}$ ~~0~~ 1a) Neem rijvectoren in $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,3,4)$ en $v_3 = (3,4,5)$. Behoort $w = (3,4,6)$ tot span(v_1, v_2, v_3)?

$a_1(1,2,3) + a_2(2,3,4) + a_3(3,4,5) = (3,4,6)$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 3 \\ 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 &= 4 \\ 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 4$ $\quad$ $3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 6$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 3$ $-$ $\quad$ $2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 4$ $-$

$a_1 + a_2 + a_3 = 1$ $\quad$ $a_1 + a_2 + a_3 = 2$

$a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$a_1 + a_2 + a_3 = 2$

tegenspraak, dus onoplosbaar

$w \notin \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$

$1\frac{1}{2}$ ~~2~~ 1b) Neem polynomen in P_3: $p_1(x) = x^3 - x^2$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^3 + 1$. Behoort $q(x) = x^2$ tot span(p_1, p_2, p_3)?

$a_1(x^3 - x^2) + a_2(x) + a_3(x^3 + 1) = x^2$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_1 &= -1 \\ a_3 &= 0 \\ a_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$a_1 + a_3 = 0$

~~invullen~~ $\downarrow$ ~~invullen~~

$-1 + 0 = 0 \to$ tegenspraak

dus $q(x) \notin \text{Span}(p_1, p_2, p_3)$

2 2a) Laat zien dat $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $T((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + 7x_3, x_2 + x_4)$ een lineaire afbeelding is. Wat is het bereik?

$T((x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)) = T((x_1 + y_1, \ldots, x_4 + y_4)) = (x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2 + 7x_3 + 7y_3,$
$x_2 + y_2 + x_4 + y_4) = (x_1 - 2x_2 + 7x_3, x_2 + x_4) + (y_1 - 2y_2 + 7y_3, y_2 + y_4) = T((x_1, \ldots, x_4)) + T((y_1, \ldots, y_4))$

$T(c(x_1, \ldots, x_4)) = T((cx_1, \ldots, cx_4)) = (cx_1 - 2cx_2 + 7cx_3, cx_2 + cx_4) = c(x_1 - 2x_2 + 7x_3, x_2 + x_4)$
$= cT((x_1, \ldots, x_4))$; $R(T) = \mathbb{R}^2$, want voor $x_2 = x_3 = 0$ geldt $T((x_1, \ldots, x_4)) = (x_1, x_4)$ dus elke $x \in \mathbb{R}^2$ kan bereikt worden met T.

1 ~~2~~ 2b) Wat is de dimensie van $V = \{x \in \mathbb{R}^4; x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$? (Denk aan de dimensiestelling.) ~~dimensiestelling~~ $V = N(T)$

$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(N(T)) + \dim(R(T))$

~~dim(N(T))~~ $\dim(V) = \dim(N(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(R(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathbb{R}^2) = 4 - 2 = 2$

2 3a) Laat $V = \mathbb{R}^3$ zijn met standaardbasis β, en laat $T: V \to V$ de spiegeling zijn in het vlak $\{x \in \mathbb{R}^3; x_1 = x_2\}$. Geef de matrixrepresentatie $A = [T]_\beta$.

$T((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, x_1, x_3)$

$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$T(\beta_1) = (0,1,0) = 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0\beta_3$

$T(\beta_2) = (1,0,0) = 1\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3$

$T(\beta_3) = (0,0,1) = 0\beta_1 + 0\beta_2 + 1\beta_3$

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 3b) Reken uit: A^{97}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{97} = (A^2)^{48} A = I^{48} A = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$